

Călătorie prin rețele invizibile: Matematica, sufletul inteligenței artificiale și al roboticii

Prof. Daniela GAVRIL

1. Introducere

Matematica reprezintă limbajul fundamental prin care descriem și modelăm fenomenele din lumea reală. În domenii precum robotica în care folosim inteligența artificială, structurile matematice permit nu doar înțelegerea mediului, ci și luarea deciziilor automate și mișcarea fizică precisă.

Printre conceptele esențiale în acest context se numără **geometria vectorială și curbele parametrice**, cum ar fi curbele Bézier, utilizate în traiectorii robotice.

2. Geometria Vectorială în Robotică

Vectorii sunt esențiali pentru a reprezenta poziții, viteze, direcții și forțe în spațiu. Aceștia sunt indispensabili pentru IA (ex. reprezentarea datelor) și în robotică (ex. navigarea într-un spațiu tridimensional).

2.1 Definirea unui vector

Un vector în spațiul tridimensional putem scrie matematic, un vector v : $V = (v_x, v_y, v_z)$ unde v_x, v_y, v_z sunt componentele sale pe axa Ox, Oy, Oz.

2.2 Operații fundamentale

Norma (lungimea) unui vector: $\|V\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Produsul scalar între doi vectori u și v : $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Produsul vectorial între doi vectori: $u \times v = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$

2.3 Aplicabilitate în robotică

Câteva exemple de folosire a vectorilor în robotică:

- pentru calcularea orientării senzorilor;
- pentru determinarea distanței față de obstacole;
- pentru trasarea traiectoriilor optime între două puncte.

De exemplu, un robot autonom care evită obstacole folosește vectori pentru a calcula direcția de deplasare și pentru a se orienta corect în spațiu.

3. Curbele Bézier și Polinoamele Bernstein

Curbele Bézier sunt curbe parametrice folosite extensiv în grafică computerizată, animație, modelarea traiectoriei în robotică și în rețelele de inteligență artificială. Aceste curbe sunt definite folosind polinoame Bernstein și puncte de control. Ele sunt esențiale în determinarea traiectoriilor unui braț robotic.

3.1 O curbă Bézier de grad n definită de punctele de control P_0, P_1, \dots, P_n este descrisă de formula:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-i} t^i P_i, \quad t \in [0,1], \quad \text{unde } t \text{ este parametrul de interpolare.}$$

O astfel de curbă este descrisă de polinoame Bernstein de grad n :

$$B_{i,n} = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i.$$

Exemplu:

- ❖ **Curba Bézier cubică** (de grad 3) este definită de 4 puncte de control: P_0, P_1, P_2, P_3 . Forma sa matematică este :

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1]$$

Unde polinoamele Bernstein pentru gradul 3 sunt:

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3; \quad B_{1,3}(t) = 3(1-t)^2 t; \quad B_{2,3}(t) = 3(1-t) t^2; \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Astfel, fiecare punct de control contribuie la curbă cu un coeficient care depinde de t . Curba începe din P_0 , trece aproape de P_1 și P_2 fără să le atingă neapărat, ele ghidând forma curbei, și ajunge în P_3 .

- ❖ **Curba Bézier de grad 2** este definită de 3 puncte de control: P_0, P_1, P_2 . Forma sa matematică este :

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t) t P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1]$$

Unde polinoamele Bernstein pentru gradul 2 sunt:

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2; \quad B_{1,2}(t) = (1-t) t; \quad B_{2,2}(t) = t^2$$

- ❖ **Curba Bézier de grad 4** este definită de 5 puncte de control: P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 . Forma sa matematică este :

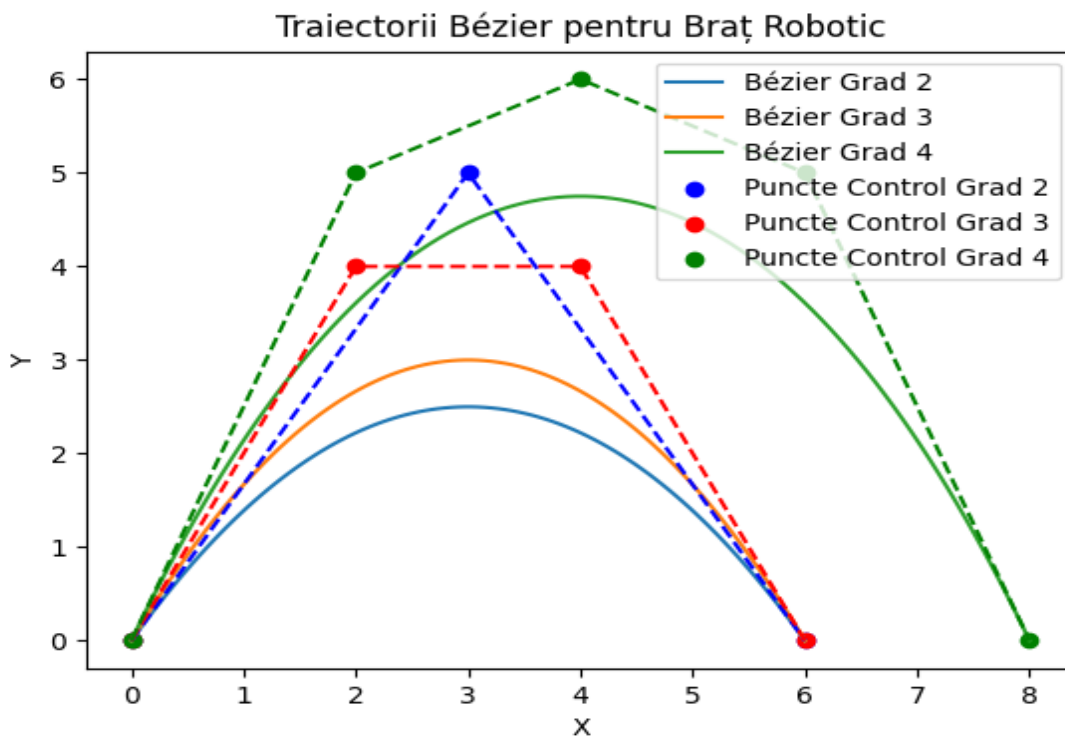
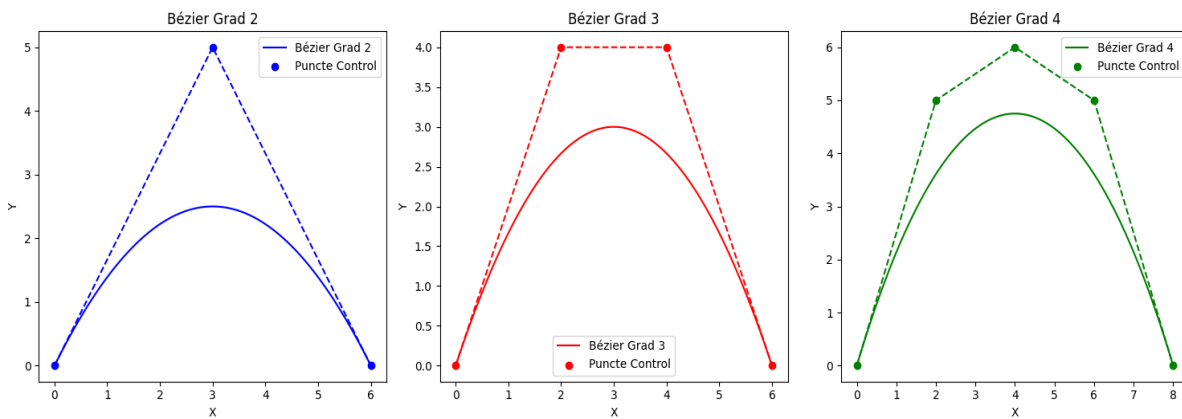
$$B(t) = (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4, \quad t \in [0,1]$$

Unde polinoamele Brenstein pentru gradul 4 sunt:

$$B_{0,4}(t) = (1 - t)^4 ; B_{1,4}(t) = 4(1 - t)^3 t ; B_{2,4}(t) = 6(1 - t)^2 t^2 ;$$

$$B_{3,4}(t) = 4(1 - t)t^3 ; B_{4,4}(t) = t^4 ;$$

Astfel, fiecare punct de control contribuie la curbă cu un coeficient care depinde de t. Curba începe din P_0 , trece aproape de P_1, P_2, P_3 fără să le atingă neapărat, ele ghidând forma curbei, și ajunge în P_4 .



Comparând cele trei curbe observăm :

❖ Curbele de grad 2(parabolic):

- oferă doar un punct de control, ceea ce face dificilă modelarea traiectoriilor complexe;
- nu se poate controla viteza și accelerația astfel încât să se asigure o mișcare lină.

❖ Curbele de grad 3(cubic):

- au două puncte de control intermediar, ceea ce permite ajustarea precisă a traiectoriei;
- oferă o tranziție lină între poziții, ceea ce este esențial pentru un braț robotic;
- permite controlul vitezei și accelerației(derivate de ordin 1 și 2 sunt funcții continue).

❖ Curbele de grad 4 :

- chiar dacă au o flexibilitate mai mare, acestea sunt mai complexe din punct de vedere matematic și computațional;
- poate introduce oscilații , ceea ce conduce la mișcări necontrolate;

Pe măsură ce crește gradul, curba devine mai maleabilă, dar și mai dificil de controlat. În același timp utilizează și mai multe resurse.

4. Concluzii

Matematica — prin conceptele de vectori, curbe și polinoame — oferă limbajul esențial pentru dezvoltarea inteligenței artificiale și a roboticii. Fără aceste structuri precise, capacitatea roboților de a naviga, de a învăța sau de a colabora în mod autonom nu ar fi posibilă.

Curbele Bézier, de exemplu, reprezintă o punte între abstract și real, desenând calea invizibilă pe care algoritmi o urmează pentru a transforma datele în acțiuni.